DEMONSTRAÇÃO PARA O TEOREMA DA BASE MÉDIA DE UM TRIÂNGULO PELAS PROPRIEDADES DOS VETORES

Elias Rafael de Sousa[1]

Cleyton Hércules Gontijo[2]

RESUMO: Este trabalho objetiva apresentar um relado de experiência onde expomos uma demonstração para o teorema da base média de um triângulo pelas propriedades de vetores. O método a ser utilizado será o enfoque critico-dialético e uma abordagem qualitativa (GAMBOA, 2013), para análise das gravações de áudio e vídeo, baseamos em LOIZOS (2008). O relato aconteceu em um curso de especialização em docência matemática para professores de matemática e engenheiros em uma instituição do Estado de Goiás. Nessa perspectiva utilizamos as propriedades vetoriais explorando uma figura geométricas. Foram feitas duas demonstração; a primeira o teorema da base média de um triângulo e a segunda abordagem explorando os conceitos de vetores. Para construção das figuras utilizamos o *software* Geogebra.

PALAVRAS-CHAVE: Propriedades vetoriais. Demonstração matemática. Teorema da base média.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho objetiva apresentar um relato de experiência onde expomos a demonstração do teorema da base média de um triângulo evidenciando as propriedades vetoriais, onde tal apresentação, destaca a relevância dos estudos de vetores como um dos pontos primordiais para álgebra linear e geometria analítica.

É notório que o estudo de vetores fica a cargo dos professores de Física, que apresenta esse assunto exclusivamente com a intenção de usá-los para resolver problemas relativos a sua disciplina, e isso tem estendido para o ensino superior.

Na perspectiva matemática, os vetores apresentam uma grande potencialidade quando utilizado como ferramenta na resolução de problemas matemáticos, contudo a má apresentação desses assuntos em sala de aula, deixa a entender que tal abordagem é de aplicação restrita da Física.

[1] Mestre em Educação Matemática e membro do colegiado de Matemática do Centro Universitário Alfredo Nasser – UNIFAN. E-mail: rafaelsousa@unifan.edu.br.
[2] Professor Doutor – UnB.

Com o objetivo de estimular o aprendizado do aluno sobre o tema, apresentaremos a demonstração desse teorema por vetores, por ser um assunto relevante para o estudo da Álgebra Linear e Geometria Analítica.

2 METODOLOGIA

O método a ser utilizado será o enfoque critico-dialético e uma abordagem qualitativa. Para este enfoque, o homem conhece para transformar e o conhecimento tem sentido quando revela as alienações, as opressões e as misérias da atual fase de desenvolvimento da humanidade. “O conhecimento crítico do mundo e da sociedade e a compreensão de sua dinâmica transformadora propiciam ações (práxis) emancipadora”. (GAMBOA, 2013, p. 75).

Para a demonstração escolhemos como conteúdo a demonstração para o teorema da base média de um triângulo pelas propriedades vetoriais, por estar inserido em outros campos da matemática.

Para construção da figura foi utilizado o software Geogebra, que segundo Sousa (2017), a investigação com o recurso tecnológico, no nosso caso, o *software* Geogebra, possui uma contribuição, no qual, possibilita o aluno à uma dinamização nas experimentações matemáticas, colaborando com o entendimento de certas propriedades.

Para os relatos dos alunos utilizamos gravações de áudio e vídeo para análise dos resultados, que segundo Loizos (2008), “o registro em vídeo torna-se necessário “sempre que algum conjunto de ações humanas é complexo e difícil de ser descrito compreensivamente por um único observador, enquanto este se desenrola”. O autor apresenta exemplos como, cerimônia religiosa, atividades artística, ensino em sala de aula com mais de uma hora de duração etc.

3 DISCUSSÕES, RESULTADOS E/OU ANÁLISE DE DADOS

Tal demonstração foi apresentada para uma turma de 23 alunos de pós-graduação em docência matemática do ensino superior de uma instituição no Estado de Goiás. O interesse para escrever o relato foi através de uma aula onde ao apresentar as propriedades vetoriais e indagar aos alunos se eram do conhecimento a demonstração do teorema da base média de um triângulo pelas propriedades vetoriais, apenas 17,4% conheceram essa demonstração em sua graduação, sendo que 82,6% desconheciam.

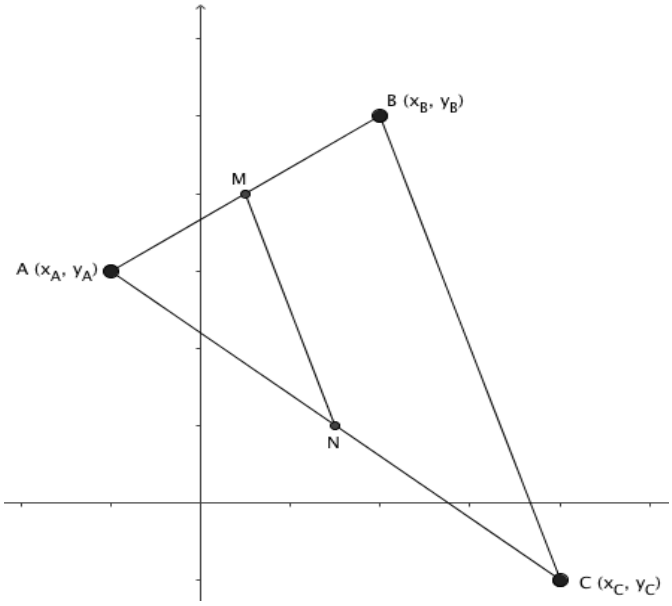
Para dar início a argumentação, primeiramente apresentamos a demonstração do teorema da base média de um triângulo, que segundo relatos era de conhecimento de todos, e logo em seguida, foi apresentado a demonstração por propriedades vetorial.

A seguir apresentamos a primeira demonstração.

Teorema: O Segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Logo: $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}^{-}}{2}$

Figura 1



Fonte: Autor (2020).

Demonstração:

Seja o triângulo ABC , cujas coordenadas são dadas por:

$A\ (x_A, y_A),\ B\ (x_B, y_B), C\ (x_C, y_C)$

Tomando M e N os pontos médios dos lados AB e AC.

Vamos demonstrar que:

$$\overline{MN} // \overline{BC} \text{ e } \overline{MN} = \frac{\overline{BC}^{-}}{2}$$

O coeficiente angular da reta que passa por BC é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_C - y_B)}{(x_C - x_B)} \quad (1)$$

Se M é o ponto médio de AB, logo:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Se N é o ponto médio de AC, logo:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

Sabemos que o coeficiente angular da reta que passa por MN é dado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_M - y_N)}{(x_M - x_N)} = \frac{\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\frac{y_A + y_C}{2}\right)}{\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{y_B + y_C}{2}\right)}{\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right)} = \frac{(y_c - y_B)}{(x_C - x_B)} \quad (2)$$

Observe que existe uma relação de igualdade entre (1) e (2), logo, temos que os coeficientes angulares das retas que passam por MN e BC são iguais, com isso as retas são paralelas.

Calculando a distância entre os pontos B e C temos que:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_c)^2 + (y_B - y_c)^2} = BC$$

Calculando a distância entre os pontos M e N temos que:

$$d_{MN} = \sqrt{\left[\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\frac{y_A + y_C}{2}\right)\right]^2} = MN$$

$$d_{MN} = \sqrt{\left(\frac{x_B - x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_C}{2}\right)^2} = MN$$

$$d_{MN} = \sqrt{\frac{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}{4}} = \frac{d_{AB}}{2}$$

Logo demonstramos que:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC}^{-}}{2}$$

Com a primeira demonstração apresentada aos alunos, fizemos uma breve revisão sobre propriedades vetoriais.

Propriedade de adição de vetores

1) Sendo $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no plano, obtemos as seguintes propriedades:
2) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
3) Associatividades: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
4) Existência do elemento neutro: $\vec{u} + 0 = \vec{u}, onde\ \vec{0}\ é\ o\ vetor\ nulo$;
5) Existência de inverso aditivo: para cada $\vec{u}$ existe um único vetor, que designamos por $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Multiplicação de vetores por escalares

Seja $\lambda \in \Re$ e $\vec{u}$ um vetor. A multiplicação de λ pelo vetor $\vec{u}$ resulta em um vetor $\lambda\vec{u}$ que satisfaz as condições aa seguir:

1) $||\lambda\vec{u}|| = ||\lambda||\ ||\vec{u}||$, logo, o comprimento de $\lambda\vec{u}$ é igual ao comprimento de $\vec{u}$ por $|\lambda|$;
2) $\lambda\vec{u}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$;
3) $\lambda\vec{u}$ tem o mesmo sentido de $\vec{u}$ se $\lambda > 0$ e $\lambda\vec{u}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{u}$ se $\lambda < 0$;
4) Seja $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$, logo temos que $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ ou $\lambda\vec{u} = 0$.

Propriedades da multiplicação de vetores por escalares.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no plano e $\alpha, \lambda \in \Re$, é válido as seguintes propriedades:

1) Associatividade: $\alpha(\lambda\vec{u}) = \overrightarrow{(\alpha\ \lambda)u}$;
2) Distributividade: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ e $(\alpha + \lambda)\vec{u} =$

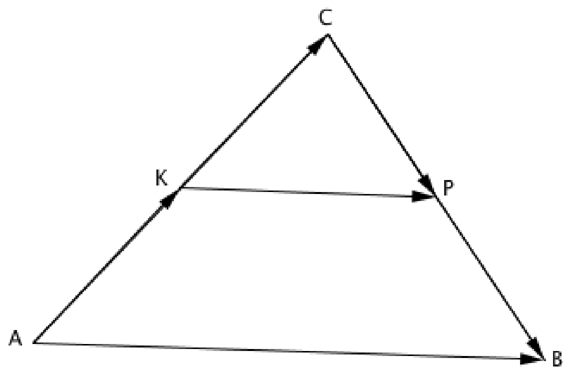
3) $\alpha\vec{u} + \lambda\vec{u}$;

Existência de elemento neutro multiplicativo: O número $1 \in \Re$, tal que $1\vec{u} = \vec{u}$.

Feito essa breve revisão das propriedades vetoriais, apresentamos a demonstração do teorema da base média de um triângulo pelas propriedades vetorial aos alunos.

Teorema: Seja ABC um triângulo qualquer, se K e P são pontos médios de CA e CB respectivamente, então: $\overrightarrow{KP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$.

Figura 2



Fonte: Autor (2020).

Por hipótese, temos:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KP} \ (1)$$

$$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{KP} \ (2)$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KC} \rightarrow \overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \ (3)$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC} \rightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2} \ (4)$$

Pelas propriedades vetoriais temos:

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CP} \ (5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \ (6)$$

Substituindo (3) e (4) em (5) temos:

$$\overrightarrow{KP} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CB}}{2} \quad (7)$$

Substituindo (6) em (7) demonstramos que:

$$\overrightarrow{KP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \quad (8)$$

Finalizada a demonstração, indagamos aos alunos sobre a compreensão e a aplicação das propriedades e obtivemos os seguintes relatos:

Aluno 1: Muito interessante a demonstração pelas propriedades, particularmente eu achei bem mais fácil e direta pra chegar ao resultado.

Aluno 2: Essa demonstração eu tinha visto na disciplina de Geometria Plana.

Aluno 3: A primeira demonstração é mais complexa para apresentar aos alunos, mas para entender ela pelas propriedades de vetores é importante conhecer a parte teórica. É um bom exercício para os alunos demonstrar.

Indaguei ao aluno 3 qual seria essa parte teórica?

Aluno 3: - A parte das propriedades e a representação vetorial (desenho).

Aluno 4: De início é um pouco complicado de visualizar a demonstração, mas quando vamos fazendo e relembrando as propriedades, fica mais fácil o entendimento. Muito interessante!

Feita as duas demonstrações, observamos a relevância da construção do conhecimento científico do aluno que para SOUSA (2017, pág. 42) " [...] uma tarefa faz-se necessário que o professor associe o conhecimento científico aprofundado o conteúdo dos processos de aprendizagem com o conhecimento dos alunos, considerando também as condições materiais de realização do ensino." Ao inquirir os alunos ao decorrer da demonstração buscamos engendrar nos alunos um despertar para o processo de aprendizagem.

4 CONCLUSÕES

Concluímos que essa demonstração apresenta a importância do conhecimento sobre álgebra linear e geometria analítica, ressaltando, a evidência e o conhecimento sobre a teoria vetorial para essa demonstração, com isso é possível observar duas consideráveis consequência:

1. A base média é paralela ao terceiro lado;

2. Se existe um segmento paralelo a um lado de um triângulo, e esse segmento tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, logo conclui-se que a extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Logo, ressaltamos os motivos para demonstração desse teorema por vetores, onde tal abordagem e pouco apresentada por professores nos cursos de licenciatura em matemática.

REFERÊNCIAS

GAMBOA, S. S. **Projetos de pesquisa, fundamentos lógicos**: a dialética entre perguntas e respostas. Chapecó: Argos, 2013. p. 75.

LOIZOS, P. Vídeo, filme e fotografias como documentos de pesquisa. In: BAUER, M. W.; GASKELL, G. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 137-155.

SOUSA, R. S. **As contribuições do Ensino Desenvolvimental de Davydov para o Ensino de Geometria Euclidiana no curso de licenciatura em matemática**. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação para ciências e matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Jataí, 2017.